

Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Philosophischen Fakultät

der

Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Herbert Naumann

aus Schwelm in Westf.



Marburg 1954

Als Dissertation angenommen am 29. 11. 1952

Berichterstatter: Professor Dr. Arnold Schmidt

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 1. 1953

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

Sonderabdruck aus
„Mathematische Zeitschrift“, Band 60, Heft 2, Seite 120—141, 1954
Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg

NAUMANN, H.

Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 120—141 (1954)

Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie.

Von

HERBERT NAUMANN.

Einleitung.

Nach M. HALL [10]¹⁾ reicht zur Begründung einer analytischen ebenen Geometrie, in der die Geraden durch lineare Gleichungen ausgedrückt werden, außer den trivialen affinen Inzidenzaxiomen ein eng an das Koordinatensystem gebundener Spezialfall des kleinen Desarguesschen Satzes aus. Algebraisch werden auf dieser Stufe außer den Loopeigenschaften der Addition und Multiplikation²⁾ nur gewisse, Addition und Multiplikation miteinander verbindende Auflösbarkeitsaxiome gefordert, aber keines der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze. Bei Hinzunahme einzelner dieser Rechengesetze ergeben sich weitere Stufen, die geometrisch durch stärkere Schnittpunktsätze gekennzeichnet sind. In der vorliegenden Arbeit wird eine derartige Stufensystematik gegeben und die Frage nach der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen mittels entsprechender Modelle behandelt.

Die vorliegende Arbeit entstand im Anschluß an Seminare über Grundlagen der Geometrie auf Anregung von Herrn Prof. Dr. ARNOLD SCHMIDT.

§ 1. Axiomatische Grundlage.

Dieser Arbeit liegen die Axiome und Punktrechnungsdefinitionen HILBERTs³⁾ zugrunde. Von den geometrischen Axiomen HILBERTs benötigen wir die ebenen Verknüpfungsaxiome I 1–3 und das verschärfte Parallelenaxiom IV*. Wir bezeichnen dieses Aggregat von Axiomen im folgenden kurz als die (trivialen) ebenen affinen Axiome und eine Geometrie, die diesen Axiomen genügt, als „affine Ebene“.

Von dem HILBERTschen Axiomensystem der reellen Zahlen⁴⁾ benötigen wir die Verknüpfungs- und die Rechenaxiome⁵⁾:

¹⁾ Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

²⁾ Letztere unter Ausschluß des additiv neutralen Elements 0, für dessen Multiplikation $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ gilt.

³⁾ D. HILBERT [11].

⁴⁾ D. HILBERT [11], Anhang VI [„Über den Zahlbegriff“, abgedruckt aus Jber. dtsh. Math. Ver. 8 (1900)]. — Die Numerierung der Axiome ist hier eine andere als bei HILBERT.

⁵⁾ In der Algebra ist diese Aufteilung der Körperaxiome in Axiome der Verknüpfung und Axiome der Rechnung nicht üblich geworden; im folgenden wird sie sich jedoch als zweckmäßig und der Behandlung unseres Stoffes als durchaus angemessen erweisen.

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. Eindeutige Existenz einer Summe und eines Produkts.

I 2. Eindeutige Existenz einer Zahl Null und einer davon verschiedenen Zahl Eins mit

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

I 3. Eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen $a + x = b$ und $y + a = b$ bei beliebig gegebenem a, b und der Gleichungen $a x = b$ und $y a = b$ bei $a \neq 0$.

II. Axiome der Rechnung.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

$$\text{II 1.} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{II 2.} \quad a(b + c) = ab + ac \quad (1. \text{ distributives Axiom})$$

$$\text{II 3.} \quad a + b = b + a$$

$$\text{II 4.} \quad (a + b)c = ac + bc \quad (2. \text{ distributives Axiom})$$

$$\text{II 5.} \quad a(bc) = (ab)c$$

$$\text{II 6.} \quad ab = ba.$$

Zur Definition eines Alternativkörpers (vgl. § 4) fügen wir den Axiomen I 1–3, II 1–4 das folgende abgeschwächte assoziative Gesetz der Multiplikation an:

II 5*: Wenn a und b beliebige Zahlen sind, so gelten stets die Formeln

$$a(ab) = (aa)b \quad \text{und} \quad (ab)b = a(bb).$$

Die allgemeinsten Systeme doppelter Komposition, von denen hier die Rede sein wird, erfüllen die Axiome I 1–3; wir nennen sie kurz „Zahlensysteme“ und ihre Elemente einfach „Zahlen“.

Zur Definition einer affinen analytischen Geometrie mittels eines Zahlensystems reichen die Axiome I 1–3 nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

Wir betrachten das Zahlensystem mit der Additions- und Multiplikationsvorschrift

+	0	1	a	a ²	a ³	a ⁴	·	0	1	a	a ²	a ³	a ⁴
0	0	1	a	a ²	a ³	a ⁴	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	a ⁴	a ³	a ²	a	1	0	1	a	a ²	a ³	a ⁴
a	a	a ²	0	1	a ⁴	a ³	a	0	a	a ²	a ³	a ⁴	1
a ²	a ²	a ⁴	a ³	0	a	1	a ²	0	a ²	a ³	a ⁴	1	a
a ³	a ³	a	1	a ⁴	0	a ²	a ³	0	a ³	a ⁴	1	a	a ²
a ⁴	a ⁴	a ³	a ²	a	1	0	a ⁴	0	a ⁴	1	a	a ²	a ³ .

In diesem System gelten die algebraischen Verknüpfungsaxiome I 1–3 (und außerdem die Axiome der Rechnung II 2, 4–6, aber nicht II 1 und II 3).

Durch Zahlenpaare dieses Zahlensystems kann keine affine Geometrie gegeben werden, denn es lassen sich $6^2 = 36$ Zahlenpaare bilden, und diesen 36 Zahlenpaaren müßte eine affine Geometrie mit 6 Punkten auf der Geraden entsprechen, was nach einem kombinatorischen Resultat von G. TARRY [25]⁶⁾ nicht möglich ist.

Wenn jedoch gewisse lineare Auflösbarkeitsaxiome zu den Axiomen I 1–3 hinzutreten, dann ist die Möglichkeit, eine affine Geometrie zu konstruieren, immer gegeben, wie sich zeigen wird.

Unter Voraussetzung des assoziativen Gesetzes der Addition II 1 reichen die Axiome I α und I β aus:

I α . $-a x + b x = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$

I β . $y a - y b = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$.

Hierbei ist $-a x$ die bei gegebenem x nach I 3 eindeutig existierende Zahl, für die $a x + (-a x) = 0$ und, nach I 1–3, II 1, auch $-a x + a x = 0$ ist; $y a - y b$ ist lediglich als abkürzende Schreibweise für $y a + (-y b)$ zu verstehen.

Ist die Assoziativität der Addition nicht vorausgesetzt, so treten an die Stelle von I α und I β die Axiome I α^* und I β^* :

I α^* . Das Gleichungssystem

$$y + a x = b$$

$$y + c x = d$$

ist für $a \neq c$ eindeutig nach x, y auflösbar.

I β^* . Die Gleichung

$$a + u b = c + u d$$

ist für $b \neq d$ eindeutig nach u auflösbar.

Diese Auflösbarkeitsaxiome wird man sinngemäß zur Gruppe I zählen.

§ 2. Einführung einer Punktrechnung. Koordinaten.

Vergleich der Definitionen HILBERTs mit denen HALLs.

In einer beliebigen affinen Ebene zeichnen wir drei verschiedene Scharen paralleler Geraden aus und nennen die zugehörigen Geraden $\mathfrak{X}$ -, $\mathfrak{Y}$ - und $\mathfrak{Z}$ -Geraden. Einen Punkt der Ebene wählen wir als Koordinatenursprung und nennen die $\mathfrak{X}$ -Gerade durch O die x -Achse und die $\mathfrak{Y}$ -Gerade durch O die y -Achse. Nach HILBERT definiert man nun für die Punkte der x -Achse eine Addition und eine Multiplikation und stellt die Punkte der Ebene durch Koordinatenpaare solcher Punkte dar; bei HALL geschehen entsprechende

⁶⁾ Siehe auch R. H. BRUCK u. H. J. RYSER [7].

Definitionen für die Punkte der $\mathfrak{E}$ -Geraden durch O . Die Definitionen HILBERTs und HALLs geben wir andeutungsweise durch Fig. 1 zusammenfassend wieder.

Für beide Punktrechnungen gelten ersichtlich die algebraischen Axiome I 1–3. Jedem beliebigen Punkt A der x -Achse ordnen wir den Schnittpunkt A' der $\mathfrak{E}$ -Geraden durch O mit der $\mathfrak{Y}$ -Geraden durch A zu und umgekehrt. Um die Multiplikation in der HALLschen Punktrechnung mit der

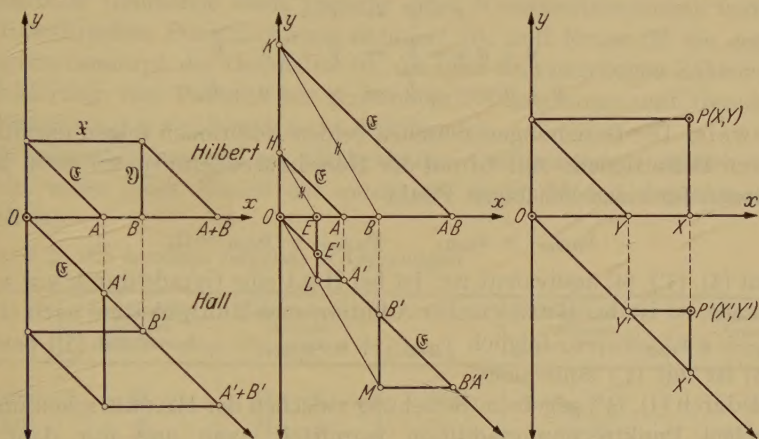


Fig. 1.

in der HILBERTschen vergleichen zu können, setzen wir zunächst voraus, daß die willkürlich, aber fest zu wählenden Punkte E und E' , die die Rolle der Eins in den Punktrechnungen spielen, einander zugeordnete Punkte sind. Ferner fordern wir die Gültigkeit des affinen kleinen Desarguesschen Satzes für den Fall, daß zwei entsprechende Dreiecks-Ecken auf der y -Achse liegen und die zugehörigen Gegenseiten $\mathfrak{X}$ -Geraden sind (Fig. 2). Dieser Schnittpunktsatz wird im folgenden mit $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ bezeichnet werden. Durch Anwendung dieses Satzes (bzw. einer seiner mit ihm äquivalenten Umkehrungen) erst auf die Dreiecke E, A, H ; L, A', O , dann auf die Dreiecke B, AB, K ; $M, B'A', O$ folgt sodann, daß HILBERTsche und HALLsche Punktrechnungsmultiplikationen invers-isomorph zueinander sind, d.h. $a b_{\text{Hilbert}} = b a_{\text{Hall}}$, wo a und b die den Punkten A, A' und B, B' zugeordneten Zahlen sind.

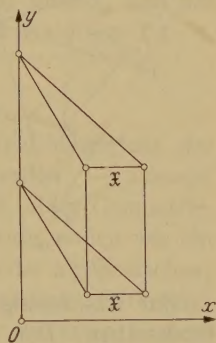


Fig. 2.

Satz 1. Seien in einer affinen Geometrie die Scharen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$, ferner die Punkte O, E und E' fest gewählt (OE $\mathfrak{X}$ -Gerade, EE' $\mathfrak{Y}$ -Gerade, OE' $\mathfrak{E}$ -Gerade); ferner seien mit $\frac{1}{r}a$ und $\frac{1}{r}a$ die zu a links- bzw. rechtsnegativen Zahlen bezeichnet ($\frac{1}{r}a + a = \frac{1}{r}a = 0$). Dann ist unter Voraussetzung des Schnittpunktsatzes $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ der Zusammenhang zwischen der HILBERTschen und der HALLschen Darstellung durch folgende Beziehungen gegeben:

	HILBERT	HALL
(1)	$a + b = c$	$\leftrightarrow b \cdot c = a$
(1')	$\neg c + a = \neg b$	$\leftrightarrow a + b = c$
(2)	ab	$\leftrightarrow ba$
(3)	$P(a, b)$	$\leftrightarrow P(a, \neg b)$
(3')	$P'(a, \neg b)$	$\leftrightarrow P'(a, b)$
(4)	$x = c$	$\leftrightarrow x = c$
(5)	$y + ax = b$	$\leftrightarrow y = xa \cdot b$
(5')	$y + ax = \neg b$	$\leftrightarrow y = xa + b.$

Beweis. Die Beziehungen zwischen beiden Additionen folgen unmittelbar aus ihren Definitionen. Auf Grund der Koordinatendefinitionen ist in beiden Additionen für einen beliebigen Punkt

$$x_{\text{Hilbert}} = x_{\text{Hall}}, \quad y_{\text{Hilbert}} + y_{\text{Hall}} = 0,$$

was mit (3), (3'), (4) äquivalent ist. Ist bei HALL eine Gerade durch $y = xa + b$ dargestellt, so ist bei HILBERTScher Addition und Multiplikation nach (1'), (2) $\neg y_{\text{Hall}} + ax_{\text{Hall}} = \neg b$, folglich $y_{\text{Hilbert}} + ax_{\text{Hilbert}} = \neg b$, womit (5') bewiesen ist. (5) ist mit (5') äquivalent.

Die durch (1), (1') gegebene Beziehung zwischen der HILBERTSchen und der HALLSchen Punktrechnungsaddition vermittelt dann und nur dann eine Isomorphie, wenn in einer der beiden Additionen (und folglich in beiden) aus $a + (b + c) = 0$ stets $(a + b) + c = 0$ folgt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das assoziative Gesetz der Addition gilt, und folgt auch schon aus den schwächeren Gesetzen

$$\left. \begin{aligned} -a + a &= a - a = 0, \\ (a + b) - b &= a = -b + (b + a). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

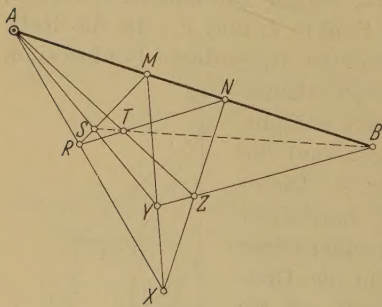


Fig. 3.

§ 3. Stufen der Begründung.

Wir stellen nun sieben Stufen der affinen Geometrie zusammen, die durch verschiedene geometrische und algebraische Voraussetzungen gekennzeichnet sind.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die benötigten Schnittpunktsätze durch Buchstaben. Den affinen PAPPUS-PASCALSchen Satz und den affinen DES-ARGUESSchen Satz nennen wir Π und Δ . Mit d bezeichnen wir den sog. „kleinen Desarguesschen Satz“, von M. HALL als „Theorem L“ bezeichnet (Fig. 3; Benennungen der Punkte wie bei HALL); es können bei diesem Satz Punkte oder auch eine Gerade uneigentlich sein. Die übrigen der benötigten Schnittpunktsätze sind sämtlich Spezialfälle des kleinen Desarguesschen Satzes. Wird die Gerade $AMNB$ als uneigentlich vorausgesetzt, so entsteht der „affine kleine Desarguessche Satz“ δ . Weiter ist $d^{\exists}$ der Spezialfall mit ARX

als uneigentlicher Gerade und A als uneigentlichem Schnittpunkt Y_∞ aller $\mathfrak{Y}$ -Geraden, $\delta_{\mathfrak{Y}}$ der Spezialfall mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als Y_∞ , analog δ_x mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als X_∞ , und schließlich δ_y^x mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade, ARX als y -Achse und B als X_∞ (vgl. Fig. 2).

Eine affine Geometrie und ein Zahlensystem nennen wir gekoppelt, wenn (1) das gegebene Zahlensystem isomorph dem Zahlensystem ist, das durch die gegebene Geometrie nach Vorgabe eines Koordinatensystems mittels der HILBERTSchen Punktrechnung definiert ist, und ferner (2) die gegebene Geometrie isomorph der Geometrie ist, die über dem gegebenen Zahlensystem bei Erklärung von Punkten als geordneten Zahlenpaaren und Geraden als Gleichungen $y + a x = b$ und $x = c$ definiert ist.

Ein geometrisches und ein algebraisches Axiomensystem nennen wir gekoppelt, wenn jedes Modell des einen mit einem Modell des anderen gekoppelt ist.

Satz 2. *Es bestehen folgende Koppelungen:*

	Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie		Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie
1. Stufe	Π	II 1–6	5. Stufe	$\delta_x, \delta_{\mathfrak{Y}}$	I α , II 1, 2
2. Stufe	Δ	II 1–5		$(\rightarrow \delta)$	$(\rightarrow \text{II } 3)$
3. Stufe	$\mathfrak{d}$	II 1–4, 5*	6. Stufe	$\delta_{\mathfrak{Y}}$	I α, β , II 1
4. Stufe	$\delta, \mathfrak{d}^{\mathfrak{Y}}$	II 1–4	7. Stufe	δ_y^x	I α^*, β^*

Die meisten dieser Koppelungen sind aus der Abhandlung [10] von M. HALL mittels der Übersetzungsvorschrift von § 2 und einfacher geometrischer Überlegungen herzuleiten⁷⁾. Wegen des Beweises von δ aus δ_x und $\delta_{\mathfrak{Y}}$ und des Beweises der Kommutativität der Addition II 3 aus den Axiomen I 1–3, α , II 1, 2 siehe § 6.1 und § 6.2.

§ 4. Modelle zu den Stufen eins bis vier.

Wir behandeln nun die Frage nach der logischen Unabhängigkeit der einzelnen Stufen. Zu den Unabhängigkeitsbeweisen werden — zumeist algebraische — Modelle herangezogen. Unter einem Modell (einer Geometrie, eines Zahlensystems) der ersten, zweiten, ..., siebenten Stufe wollen wir ein System von Dingen verstehen, welches die (geometrischen oder algebraischen) Axiome der betreffenden Stufe befriedigt, nicht aber die der nächst-, „stärkeren“ Stufe. Bei der Angabe solcher Modelle werden wir bei der stärksten (ersten) Stufe beginnen und schrittweise bis zur schwächsten (siebenten) Stufe vorgehen.

Die algebraischen Modelle der *ersten Stufe* sind die Körper, und als algebraische Modelle der *zweiten Stufe* kommen genau die echten Schiefkörper in Betracht.

⁷⁾ Es sei hier daran erinnert, daß die beiden ersten Stufen zuerst von D. HILBERT [11] und die dritte von R. MOUFANG [15], [16] näher untersucht wurden; betreffs weiterer vorliegender Arbeiten zu den in Satz 2 angegebenen Koppelungen sei auf später folgende Zitate verwiesen.

Die algebraischen Modelle der *dritten Stufe* sind die echten Alternativkörper und als solche CAYLEY-DICKSON-Algebren über ihren Zentren⁸⁾. Die einfachste unter ihnen ist die CAYLEYSche Algebra über dem Körper der rationalen oder der reellen Zahlen, deren Basisgrößen $1, e_1, e_2, \dots, e_7$ sich nach passender Numerierung folgendermaßen multiplizieren:

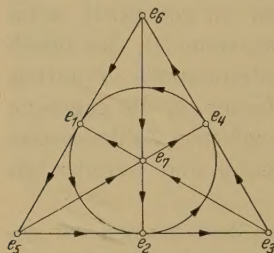


Fig. 4.

$$e_i e_{i+k} = \begin{cases} e_{i+3k} \\ -1 \\ -e_{i-2k} \end{cases} \quad \text{für} \quad k^3 \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \pmod{7},$$

wobei die Indizes mod 7 aus dem Restsystem 1, 2, ..., 7 zu nehmen sind. Diese Multiplikationsvorschrift läßt sich leicht in Gestalt einer (symbolischen) Konfiguration 7_3 merken, deren Seiten mit einem zyklischen Durchlaufungssinn versehen sind (Fig. 4):

Es ist $e_\alpha^2 = -1$ und, wenn $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ ein „kollineares“ Tripel von Basisgrößen ist, $e_\alpha e_\beta = -e_\beta e_\alpha = \pm e_\gamma$ mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen bei positiver bzw. negativer Orientierung des Tripels. — In Analogie zu den Quaternionen könnte man diese Algebra die „CAYLEYSchen Oktonionen“ nennen⁹⁾.

Als algebraische Modelle der *vierten Stufe* kommen alle diejenigen nicht-assoziativen, beiderseits distributiven Divisionsalgebren in Frage, in denen II 5* nicht gilt. Beispiele hierzu gab L. E. DICKSON¹⁰⁾.

§ 5. Modelle zur fünften Stufe.

Die algebraischen Modelle zur fünften Stufe sind die nur linksseitig distributiven Zahlensysteme mit assoziativer Addition, sofern in ihnen die Gleichung $-a x + b x = c$ für $a \neq b$ eine eindeutige Lösung besitzt. Zu diesen Modellen gehören alle *endlichen* nur linksseitig distributiven Divisionsalgebren, da im Falle der Endlichkeit das angeführte Auflösbarkeitsaxiom I α beweisbar ist¹¹⁾. Beispiele dieser Art finden sich wieder bei L. E. DICKSON¹²⁾. Insbesondere gehören hierher die endlichen *vollständigen Fastkörper* im Sinne von H. ZASSENHAUS [30], das sind im wesentlichen endliche Zahlensysteme der fünften Stufe mit assoziativer Multiplikation¹³⁾.

⁸⁾ Wegen des Zusammenhangs von Geometrie und Alternativkörper s. R. MOUFANG [15], [16], ferner M. HALL [10]. Daß jeder Alternativkörper assoziativ oder eine CAYLEY-DICKSON-Algebra (vgl. L. E. DICKSON [9], S. 264f.) über seinem Zentrum ist, bewiesen R. H. BRUCK und E. KLEINFELD ([6] für Charakteristik $\neq 2$; [12] für Charakteristik 2) und, unabhängig davon, L. A. SKORNIKOW ([21] für Charakteristik $\neq 2, 3$).

⁹⁾ (lat.) *quaterni* je vier, *octoni* je acht.

¹⁰⁾ Siehe z. B. L. E. DICKSON [8], S. 69. Als neuere Arbeit zu diesem Gegenstand vgl. A. A. ALBERT [2]. — Geometrien über Zahlensystemen der vierten und fünften Stufe wurden zuerst von O. VELEN und J. H. M. WEDDERBURN [27] konstruiert.

¹¹⁾ R. STETTLER [24].

¹²⁾ L. E. DICKSON [8], S. 71.

¹³⁾ Der Zusammenhang stellt sich genauer folgendermaßen dar: Jedes endliche assoziative Zahlensystem der fünften Stufe ist ein vollständiger Fastkörper; das ZASSEN-

Ein auf L. E. DICKSON zurückgehendes unendliches Modell, in dem die Axiome I 1–3, $\bar{\alpha}$, II 1–3, 5 gelten, findet sich in multiplikativ invers-isomorpher Gestalt bei K. REIDEMEISTER [20], S. 43; dabei ist I $\bar{\alpha}$ das folgende Axiom:

I $\bar{\alpha}$. $a x + b x = c$ eindeutig lösbar für $a + b \neq 0$.

Hierzu läßt sich zeigen: Unter Voraussetzung der Axiome I 1–3, II 1, 2 folgt I α aus I $\bar{\alpha}$; umgekehrt gilt unter Voraussetzung von I α dann und nur dann I $\bar{\alpha}$, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört.

Zum Beweise der ersten Behauptung genügt der Nachweis der Formel $(-a)b = -ab$, wobei man sich auf $b \neq 0$ beschränken kann. Es gibt ein c und wegen $b \neq 0$ weiter ein d , daß $0 = (-a)b + c = (-a)b + d b$ ist. Also gestattet die Gleichung $(-a)x + d x = 0$ die beiden Lösungen $x = b$ und $x = 0$. Unter der Annahme $-a + d \neq 0$ wäre diese Gleichung eindeutig lösbar, folglich $b = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $-a + d = 0$, $(-a)b + a b = 0$.

Um die zweite Behauptung einzusehen, genügt es nunmehr zu zeigen, daß $(-a)b = -ab$ dann und nur dann gilt, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört. Nach B. H. NEUMANN [18] folgt aus $(-1) \cdot ((-1) \cdot a) = (-1)^2 \cdot a$ die die Kommutativität der Addition nach sich ziehende Formel $(-1) \cdot a = -a$, aus der sich $(-a)b = ((-1) \cdot a)b = (-1) \cdot ab = -ab$ folgern läßt. Umgekehrt ergibt sich aus $(-a)b = -ab$ und der Formel $a(-b) = -ab$, die bekanntlich bereits aus der Links-distributivität folgt, $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$. Dann multipliziert sich aber -1 stets assoziativ.

Die Formel $(-1) \cdot a = -a$ ist bekanntlich aus den Axiomen I 1–3, α , II 1, 2 nicht beweisbar¹⁴⁾. Gilt diese Formel nicht, so gehört -1 nicht zum assoziativen Zentrum.

Weitere Modelle der fünften Stufe mit nichtassoziativer Multiplikation kann man aus solchen der vierten Stufe herleiten: Mittels eines Zahlensystems der vierten Stufe läßt sich eine affine Geometrie konstruieren, in der die Sätze δ und $\mathfrak{d}^{\mathfrak{V}}$ gelten. Im allgemeinen ist $\mathfrak{d}^{\mathfrak{X}}$ dann nicht erfüllt. Durch Vertauschung der Scharen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelangt man so zu einer Geometrie der fünften Stufe. Algebraisch stellt sich dieser Übergang folgendermaßen dar:

$$a \oplus b = b + a$$

$$\bar{a} \cdot (a \odot b) = b \quad \text{mit} \quad \bar{a} \cdot a = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$0 \odot a = 0.$$

HAUSSCHE Axiom „aus $\mu x = x$ und $x \neq 0$ folgt $\mu = 1$ “ ergibt sich daraus, daß nach I α aus $\mu \neq 1$ $x = 0$ folgt. Umgekehrt genügt jeder endliche vollständige Fastkörper, für den zusätzlich $0 \cdot a = 0$ festgesetzt wird, den algebraischen Axiomen der fünften Stufe sowie dem assoziativen Gesetz der Multiplikation.

¹⁴⁾ Gegenbeispiel hierfür bis auf multiplikative inverse Isomorphie im Zahlensystem U von M. HALL ([10] Anhang II).

§ 6. Über die Kommutativität der Addition und den affinen kleinen Desarguesschen Satz.

0. Wir beweisen in diesem Paragraphen die Kommutativität der Addition für ein Zahlensystem, das den Axiomen I 1—3, II 1, 2 und der Auflösbarkeitsforderung I α genügt (§ 6.2). Den Beweis leiten wir aus unserem geometrischen Beweis des Satzes her, daß in der affinen Ebene aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei ausgezeichnete Richtungen dieser Satz für jede Richtung folgt (§ 6.1)¹⁵.

Sodann konstruieren wir aus beliebigen nicht-Abelschen Gruppen Parallelgewebe mit unendlich vielen Parallelscharen, in denen der affine kleine

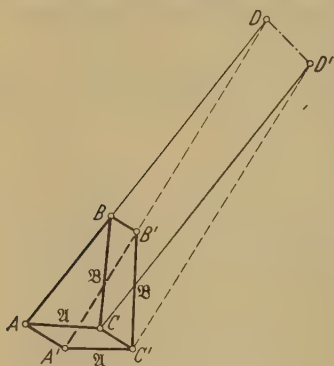


Fig. 5.

Desarguessche Satz ausschließlich für zwei Richtungen gilt (§ 6.3). Die Antwort auf die REIDEMEISTERSche Frage¹⁶), ob aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei Richtungen dieser allgemein folgt, fällt also verschieden aus, je nachdem man sie für die affine Ebene oder für das Parallelgewebe formuliert.

Es ist ein offenes Problem geblieben, ob das kommutative Gesetz der Addition aus den Axiomen I 1—3, II 1, 2 auch ohne die Auflösbarkeitsforderung I α folgt. Unter Voraussetzung der Endlichkeit ist, wie in § 5 bemerkt wurde, das Axiom I α und somit auch die Kommutativi-

tät der Addition beweisbar; wir führen noch einen zweiten, gruppentheoretischen Nachweis dieses Sachverhalts durch den Beweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind (§ 6.4)¹⁷.

1. Satz 3. Aus $\delta_{\mathfrak{A}}$ und $\delta_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$) folgt in der affinen Ebene δ .

Es genügt der Nachweis von δ für den Spezialfall, daß ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$ -Geraden und ein zweites Paar aus $\mathfrak{B}$ -Geraden besteht, da dieser Spezialfall bereits den allgemeinen Satz nach sich zieht¹⁸).

Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke und hierbei AC und $A'C'$ $\mathfrak{A}$ -Geraden, BC und $B'C'$ $\mathfrak{B}$ -Geraden und AA' , BB' und CC' paarweise parallel (Fig. 5).

Annahme: $A'B'$ sei nicht parallel zu AB .

Dann haben die Geraden AB , $A'B'$ genau einen Schnittpunkt D und entsprechend die Parallele zu AB durch C und die Parallele zu $A'B'$ durch

¹⁵ Ein Beweis des geometrischen Satzes von § 6.1 findet sich auch bei W. KLINGENBERG [13] und ein Beweis des algebraischen Satzes von § 6.2 auch bei G. PICKERT [19]. Die hier gegebenen sehr kurzen Beweise sind unabhängig davon erfolgt.

¹⁶ K. REIDEMEISTER [20], S. 145.

¹⁷ Dieser gruppentheoretische Satz folgt auch unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 der 1951 veröffentlichten Arbeit [5] von R. H. BRUCK. Der in § 6.4 dieser Arbeit angegebene Beweis ist im gleichen Jahre vom Verf. unabhängig davon gefunden worden.

¹⁸ Man kann etwa zunächst durch zweimalige Anwendung des obigen Spezialfalles den etwas allgemeineren Satz herleiten, bei dem ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$ -Geraden besteht, und erhält hieraus in analoger Weise den Satz δ in voller Allgemeinheit.

C' genau einen Schnittpunkt D' , und es ist $D \neq D'$. Nach $\delta_{\mathfrak{A}}$, angewandt auf die Dreiecke $AA'D$, $CC'D'$ ist DD' eine $\mathfrak{A}$ -Gerade; andererseits ist DD' nach $\delta_{\mathfrak{B}}$, angewandt auf die Dreiecke $BB'D$, $CC'D'$ eine $\mathfrak{B}$ -Gerade, was einen Widerspruch enthält.

2. Satz 4. *Aus den algebraischen Axiomen I 1–3, α , II 1, 2 folgt die Kommutativität der Addition II 3.*

Annahme. Es gebe zwei additiv nicht vertauschbare Zahlen a und b .

Dann ist die Gleichung

$$-(a+b)x + (b+a)x = a$$

eindeutig nach x auflösbar. Die Lösung sei γ genannt. Nun ist

$$\begin{aligned} -(a+b)(\gamma+1) + (b+a)(\gamma+1) &= -(a+b) - (a+b)\gamma + (b+a)\gamma + (b+a) \\ &= -b - a + a + b + a \\ &= a, \end{aligned}$$

d.h. $\gamma+1$ ist ebenfalls Lösung der obigen Gleichung, und aus der Eindeutigkeit der Lösung im Falle der Richtigkeit der obigen Annahme folgt $\gamma+1=\gamma$, also $1=0$.

Dieser Beweis läßt sich auch aus dem Beweis des vorstehenden Satzes 3 herleiten:

Man setze in Fig. 5 speziell $C=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,a+b)$ und $B'=(1,a)$. Dann folgt $C'=(1,-b)$ und $A'=(2,-b)$. Es ergibt sich für die Gerade AB die Gleichung

$$y + (a+b)x = a+b$$

und für die Gerade $A'B'$

$$y + (b+a)x = a+b+a.$$

Somit entspricht der Parallelität von AB und $A'B'$ die Relation $a+b=b+a$. Die gegenteilige Annahme, daß die Geraden einen Schnittpunkt $D=(\gamma,\delta)$ bestimmen, besagt, daß sich das Gleichungssystem der betreffenden Geraden eindeutig nach x und y auflösen läßt, oder, indem man y eliminiert, daß die Gleichung

$$-(a+b)x + (b+a)x = a$$

eine eindeutige Lösung $x=\gamma$ hat.

Diese Ausführungen genügen, den inneren Zusammenhang beider Beweise deutlich zu machen.

Wir geben noch eine Variante des Beweises zu Satz 4, die an Stelle des distributiven Gesetzes ein Auflösbarkeitsaxiom benutzt, das (wegen $a+1-a \neq 0$) aus dem linksdistributiven Gesetz folgt und in Zahlensystemen mit Abelscher Additionsgruppe von selbst erfüllt ist:

Satz 4a. *Aus den algebraischen Axiomen I 1–3, II 1 und der Forderung, daß die Gleichung*

$$-ax + bx = c$$

für $a \neq b$ mindestens eine Lösung und die Gleichung

$$\gamma a + \gamma - \gamma a = b$$

höchstens eine Lösung besitzt, folgt die Kommutativität der Addition II 3.

Annahme. Es sei $a + b \neq b + a$. Dann besitzt die Gleichung

$$-(a + b)x + (b + a)x = a$$

eine Lösung $x = \gamma$. Nun ist

$$\begin{aligned} -(a + b)\gamma + (b + a)\gamma &= a \\ &= a + b + a - a - b \\ &= (a + b) - (a + b)\gamma + (b + a)\gamma - (b + a), \end{aligned}$$

also

$$(a + b)\gamma + (a + b) - (a + b)\gamma = (b + a)\gamma + (b + a) - (b + a)\gamma,$$

im Widerspruch zur zweiten Auflösbarkeitsforderung.

3. Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, additiv geschrieben. Wir bilden formale Potenzreihen einer Unbestimmten t

$$(1) \quad A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i \quad (n \text{ ganz rational, } a_i \in \mathfrak{G})$$

und definieren

$$(2) \quad t^0 \cdot a = a \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{G}$$

$$(3) \quad t^i \cdot 0 = 0 \quad \text{für } i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sei $A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$ und $B = \sum_{i=m}^{\infty} t^i b_i$. Durch Vorsetzen von Nullen kann man erreichen, daß $n = m$ wird. Dann definieren wir die Gleichheit zweier Potenzreihen als Koeffizientengleichheit, die Summe

$$(4) \quad A + B = \sum_{i=n}^{\infty} t^i (a_i + b_i)$$

und die Linksmultiplikation mit einer Potenz von t

$$(5) \quad t^k \cdot A = \sum_{i=n}^{\infty} t^{i+k} a_i,$$

$$(6) \quad t^k \cdot t^l = t^{k+l}.$$

Die A 's bilden einen *Fastkörper*¹⁹⁾. Denn die in (4) definierte Addition erfüllt die Gruppenpostulate, und es ist

$$t^l \cdot (t^k \cdot A) = t^l \sum t^{i+k} a_i = \sum t^{i+k+l} a_i = (t^l t^k) \cdot A,$$

aus $t^i A = A$ und $A \neq 0$ folgt $i = 0$, und

$$t^k (A + B) = \sum t^{i+k} (a_i + b_i) = \sum t^{i+k} a_i + \sum t^{i+k} b_i = t^k A + t^k B.$$

¹⁹⁾ Vgl. H. ZASSENHAUS [30].

Satz 5. In dem durch die Definitionen (1) bis (6) definierten Fastkörper ist die Gleichung

$$-t^k \cdot X + t^l \cdot X = A$$

für $k \neq l$ eindeutig nach X lösbar.

Es genügt wegen der Fastkörpereigenschaften die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$-X + t^k \cdot X = A \quad \text{für} \quad k \neq 0$$

nachzuweisen.

Wir machen den vorläufigen Ansatz $X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i x_i$ und erhalten

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i (-x_i) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^{i+k} x_i = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$$

$$(7) \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i (-x_i + x_{i-k}) = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i,$$

folglich

$$(8) \quad x_i = x_{i-k} \quad \text{für alle} \quad i < n.$$

Falls k positiv ist, so folgt hieraus $x_i = 0$ für alle $i < n$, denn im Falle $x_j = \xi \neq 0$ ($j < n$) wäre $x_j = x_{j-k} = x_{j-2k} = \dots$ (ad inf.) $\dots = \xi$, im Widerspruch zur Definition (1). Sodann folgt aus (7)

$$(9) \quad x_i = x_{i-k} - a_i \quad \text{für} \quad i \geq n, \quad k > 0,$$

und die x_i sind sukzessiv in eindeutiger Weise bestimmbar. Falls k negativ ist, so geht mit $k' = -k$ (8) über in

$$x_{i+k'} = x_i \quad \text{für alle} \quad i < n,$$

und es folgt $x_{i+k'} = 0$ für alle $i < n$. Endlich folgt aus (7)

$$(10) \quad x_{i+k'} = x_i + a_i \quad \text{für} \quad i \geq n, \quad k' = -k > 0,$$

und auch in diesem Falle bestimmen sich die x_i sukzessiv in eindeutiger Weise.

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ abzählbar ist, kann man einen abzählbaren Fastkörper, in dem Satz 5 gilt, erhalten, indem man ihn aus den Gruppenelementen durch fortgesetzte Addition, Linksmultiplikation mit einer Potenz von t und Lösung einer Gleichung $-X + t^k X = A$ konstruiert.

Wir definieren nun mit diesem Fastkörper Punkte als geordnete Elementepaare (A, B) und sodann folgende Typen von Geraden:

$$\mathfrak{X}\text{-Gerade:} \quad Y = \text{Const.}$$

$$\mathfrak{Y}\text{-Gerade:} \quad X = \text{Const.}$$

$$\mathfrak{Z}_k\text{-Gerade:} \quad Y + t^k X = \text{Const.} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Satz 6. Die vorstehend definierten Punkte und Geraden bilden ein Parallelgewebe, in dem die Sätze $\delta_{\mathfrak{X}}$ und $\delta_{\mathfrak{Y}}$ gültig sind.

Zunächst inzidiert jeder Punkt (A, B) mit genau einer $\mathfrak{X}$ -, einer $\mathfrak{Y}$ - und, bei vorgegebenem ganzen rationalen k , einer $\mathfrak{Z}_k$ -Geraden, nämlich mit $Y=B$, $X=A$ und $Y+t^k X=B+t^k A$. Verschiedene $\mathfrak{X}$ -Geraden sind ersichtlich parallel, ebenso verschiedene $\mathfrak{Y}$ -Geraden und verschiedene $\mathfrak{Z}_k$ -Geraden mit gleichem k . Dagegen haben zwei Geraden verschiedener Scharen genau einen Schnittpunkt:

1. $Y=B, \quad X=A: (A, B)$
2. $Y=A, \quad Y+t^k X=B: (t^{-k}(-A+B), A)$
3. $X=A, \quad Y+t^k X=B: (A, B-t^k A)$
4. $Y+t^k X=A, \quad Y+t^l X=B \quad \text{mit} \quad k \neq l:$

Durch Elimination von Y ergibt sich für X die Gleichung

$$-t^k X + t^l X = -A + B,$$

die nach Satz 5 eindeutig lösbar ist; folglich ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt.

Aus dem assoziativen Gesetz der Addition und dem linksseitigen Distributivgesetz für die Multiplikation mit einem Richtungsfaktor t^k folgt die Existenz von transitiven Translationen $X'=X, Y'=C+Y$ längs $\mathfrak{Y}$ -Geraden und von transitiven Translationen $X'=X+C, Y'=Y$ längs $\mathfrak{X}$ -Geraden; daraus folgt $\delta_{\mathfrak{Y}}$ und $\delta_{\mathfrak{X}}$.

Wenn die zugrunde gelegte Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch ist, dann läßt sich auf demselben Wege auch der affine kleine Desarguessche Satz δ für alle Richtungen des Gewebes beweisen. Ist sie nicht Abelsch, dann versagt der Beweis, und es kann dann δ auch für keine andere Richtung als $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelten, da im Parallelgewebe aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für drei verschiedene Richtungen dieser allgemein folgt und sich dann alle THOMSENschen Dreiecke T schließen würden²⁰⁾, und $T_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}$ würde nach THOMSEN [26] die Kommutativität von $\mathfrak{G}$ besagen (s. Fig. 6).

Unter Berücksichtigung der Resultate von THOMSEN [26] folgt

Satz 7. Jedes 3-Gewebe, in dem T (und folglich auch R ²¹⁾) gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ allgemein gilt. Jedes 3-Gewebe, in dem R aber nicht T gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ für genau zwei verschiedene Translationsrichtungen gilt.

Es ergibt sich als einfache Folgerung:

Satz 8. Im Parallelgewebe ist aus $\delta_{\mathfrak{X}}$ und $\delta_{\mathfrak{Y}}$ der Satz δ nicht beweisbar.

4. Wir beweisen nun die Kommutativität der Addition für ein endliches Zahlensystem, das den Axiomen I 1–3, II 1, 2 genügt, auf gruppentheoretischem Wege.

²⁰⁾ Vgl. K. REIDEMEISTER [20], S. 106.

²¹⁾ Die REIDEMEISTER-Figur R (Fig. 7) besagt für ein 3-Gewebe die Darstellbarkeit durch eine Gruppe; vgl. [20], [26], [4]. Wegen des Beweises von R aus T verweisen wir auf die genannte Literatur.

Die additive Gruppe des Zahlensystems hat die Eigenschaft: Zu zwei vom Einheitsselement verschiedenen Elementen a, b gibt es stets einen Automorphismus, der a in b überführt. Das läßt sich auch so formulieren: Die Gruppe besitzt eine transitive Automorphismengruppe.

Beweis. Nach I 3 gibt es zu $a, b \neq 0$ ein von Null verschiedenes c , daß $ca = b$ ist. Durch $\mathfrak{A}(x) = cx$ ist für das Zahlensystem eine eineindeutige Abbildung definiert, die a in b überführt. $\mathfrak{A}(x)$ ist aber auch ein Automorphismus der additiven Gruppe²²⁾, denn

$$\mathfrak{A}(x + y) = c \cdot (x + y) = cx + cy = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y).$$

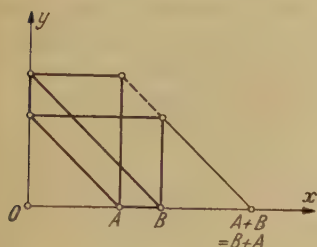


Fig. 6.

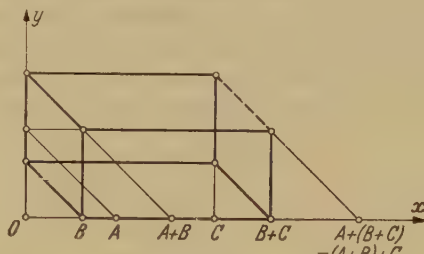


Fig. 7.

Um die Kommutativität der Addition für das gegebene Zahlensystem zu beweisen, genügt der Nachweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind.

Satz 9. Jede endliche Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe ist eine Abelsche p -Gruppe vom Typus $(p, p, \dots, p)$.

Beweis. Zunächst haben alle vom Einheitsselement verschiedenen Elemente gleiche Ordnung. Sodann muß diese Ordnung eine Primzahl p sein, da es sonst in der von einem Element erzeugten zyklischen Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ Elemente kleinerer Ordnung geben würde. Daraus folgt, da es zu jedem Primteiler p' der Gruppenordnung stets in der Gruppe ein Element von der Ordnung p' gibt, daß $\mathfrak{G}$ eine p -Gruppe ist. Nach einem bekannten Satz besitzt jede p -Gruppe ein vom Einheitsselement e verschiedenes Zentrum²³⁾; andererseits ist das Zentrum eine charakteristische Untergruppe²⁴⁾ und folglich das Zentrum einer Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe entweder das Einheitsselement e oder die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{G}$ Abelsch, und da jedes von e verschiedene Element von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p hat, so ist Satz 9 bewiesen.

Umgekehrt besitzen die Gruppen vom Typ $(p, p, \dots, p)$ eine transitive Automorphismengruppe, und sie treten auch alle als additive Gruppe eines Zahlensystems, zumindest eines der ersten Stufe, auf; so ist die Gruppe $(p, p, \dots, p)$ isomorph der additiven Gruppe des Galois-Feldes $\Gamma(p, k)$.

k -mal

²²⁾ Anmerkung. Die Menge dieser speziellen Automorphismen $\mathfrak{A}_c(x) = cx$ ($c \neq 0$) besitzt nicht notwendig die Gruppeneigenschaft, da das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht gefordert ist.

²³⁾ Siehe etwa A. SPEISER [23], S. 69.

²⁴⁾ Siehe etwa A. SPEISER [23], S. 124f.

§ 7. Modelle zur sechsten Stufe.

1. Bisher haben wir die Modelle von der algebraischen Seite her entwickelt. Auf der sechsten Stufe steht uns ein geometrisches Modell unmittelbar zur Verfügung, nämlich das MOULTONSche Modell einer nicht-Desarguesschen Geometrie²⁵⁾, das sich anschaulich unter Bezugnahme auf die gewöhnliche kartesische Geometrie etwa folgendermaßen beschreiben läßt:

Die aus der linken Halbebene kommenden, die y -Achse spitz treffenden Geraden werden an der y -Achse im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert.

Dieses Modell gestattet transitive Translationen längs der y -Achse, und es gilt daher der affine kleine Desarguessche Satz in $\mathcal{Y}$ -Richtung. Für alle übrigen Richtungen gilt er nicht, wie man sich leicht überlegt.

Das zugehörige Zahlensystem lautet

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \text{ oder } b \geq 0 \\ \frac{1}{2}ab & \text{für } a \text{ und } b \leq 0. \end{cases} \quad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

In ihm gelten die algebraischen Axiome I 1, 2, 3, α , β , II 1, 3, 5, 6, III, IV, d. h. alle Axiome der reellen Zahlen²⁶⁾ mit Ausnahme der distributiven Gesetze (z. B. ist $(-1) \odot (1 - 1) = (-1) \odot 0 = 0$, dagegen $(-1) \odot 1 + (-1) \odot (-1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$).

Das Zahlensystem der MOULTONSchen Geometrie ist zugleich ein Beispiel für ein Zahlensystem, in dem kein Körper enthalten ist²⁷⁾. Denn jeder *Teilbereich* irgendeines Zahlensystems, der unter Beibehaltung der Verknüpfungen ebenfalls ein Zahlensystem ist, enthält die Null und die Eins und den hieraus durch fortgesetzte Addition, Subtraktion und Multiplikation erzeugten Ring. Dieser Ring ist in unserem Falle bereits nicht distributiv (s. obiges Gegenbeispiel²⁸⁾). Alle im Zahlensystem der MOULTONSchen Geometrie enthaltenen Zahlensysteme enthalten also diesen nichtdistributiven Ring, folglich kann sich unter ihnen kein Körper befinden.

2. Das MOULTONSche Modell läßt sich auf verschiedene Weise verallgemeinern. Zunächst nehmen wir eine geometrische Verallgemeinerung vor.

²⁵⁾ F. R. MOULTON [17]; D. HILBERT [11], § 23.

²⁶⁾ Wegen der Axiome III und IV s. D. HILBERT [11], Anhang VI. Das Vollständigkeitsaxiom IV 2 ist hier sinngemäß so zu verstehen: Die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und der Axiome I, II 1, 3, 5, 6, III, IV 1 keiner Erweiterung mehr fähig ist.

²⁷⁾ Dagegen enthält jedes Zahlensystem der ersten bis fünften Stufe einen Primkörper.

²⁸⁾ Die Definition eines „Ringes“ ist hier natürlich allgemeiner zu fassen als üblich. Der hier speziell betrachtete Ring der „ganzen rationalen“ Zahlen des Zahlensystems der MOULTON-Geometrie besteht nicht allein aus den positiven und negativen „ganzen“ Zahlen 0, ± 1 , ± 2 , ...; dieser Bereich ist nur gegenüber der Addition und Subtraktion, nicht aber gegenüber der Multiplikation abgeschlossen. Der betreffende Ring besteht vielmehr aus den Zahlen $\pm \frac{a}{2^k}$, wo a und k natürliche Zahlen oder Null sind,

In einem gewöhnlichen ebenen kartesischen Koordinatensystem sei ein Kurven-3-Gewebe gegeben (d.h. drei Scharen stetiger Kurven mit der Eigenschaft, daß zwei beliebige Kurven von verschiedenen Scharen sich in höchstens einem Punkt treffen)²⁹⁾. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß zwei der Scharen die der Achsenparallelen, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, sind. Dann wird also jede Kurve der dritten Schar durch eine stetige, streng monotone Funktion $y=f(x)$ dargestellt.

Einschränkend verlangen wir für die dritte Schar: Die Kurven der dritten Schar überdecken die gesamte (x, y) -Ebene mit Ausnahme des Ursprungs einfach und lückenlos. Alle Kurven der Schar gehen durch den Koordinatenursprung. Die x - und die y -Achse gehören zur dritten Schar. (Für die Punkte der Koordinatenachsen gelten also die Gewebeeigenschaften nicht.) Die Ordinatendifferenz je zweier verschiedener Kurven der dritten Schar (exklusive der y -Achse) ist eine überall stetige *streng monotone* beiderseits unbeschränkte Funktion von x , und zu jedem Intervall $\langle a, b \rangle$ und jeder positiven Zahl H gibt es stets Kurven $y=f(x)$ der dritten Schar, für die $f(b)-f(a) > H$ und solche, für die $f(b)-f(a) < -H$ ist. (Dann gibt es in dieser Schar aus Gründen der Stetigkeit und Monotonie zu jedem h auch genau eine Kurve $y=f(x)$, daß $f(b)-f(a)=h$ ist.)

Dieses Kurvengewebe läßt sich zu einer zweiparametrischen Kurvenschar erweitern, indem man zu den Kurven des 3-Gewebes die Kurven hinzufügt, die aus der dritten Schar (unter Ausschluß der x - und y -Achse) durch Translation in $\mathfrak{Y}$ -Richtung hervorgehen.

In der so erhaltenen zweiparametrischen Kurvenschar gelten die HILBERTschen Axiome I 1—3, IV*, wie wir im folgenden zeigen.

Zu zwei verschiedenen Punkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) der kartesischen Ebene gibt es genau eine Verbindungskurve aus der zweiparametrischen Schar; denn für $x_1=x_2$ ist es eine Gerade $x=c$ und für $y_1=y_2$ eine Gerade $y=c$; für $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ gibt es auf Grund der Voraussetzungen, wenn man $y_2 - y_1 = h$ setzt, genau eine Kurve aus der Schar durch O , für die $f(x_2) - f(x_1) = h$ ist, und die Parallelkurve durch (x_1, y_1) geht auch durch (x_2, y_2) und ist die einzige Kurve dieser Art.

Zwei Kurven der zweiparametrischen Schar, die nicht parallel zur y -Achse sind und nicht durch Translation in $\mathfrak{Y}$ -Richtung aus derselben Kurve hervorgegangen sind, haben genau einen gemeinsamen Punkt, denn ihre Ordinatendifferenz ist bis auf eine additive Konstante nach Voraussetzung eine überall stetige, streng monotone, beiderseits unbeschränkte Funktion von x ; die Ordinatendifferenz ist daher selbst eine Funktion dieser Art und hat folglich genau eine Nullstelle. Da durch Translation in $\mathfrak{Y}$ -Richtung auseinander hervorgegangene Parallelkurven konstante Ordinatendifferenz haben und sie durch eine eindeutige Funktion von x dargestellt werden, so sind sie entweder miteinander identisch oder können sich nicht überschneiden, sind punktfremd, d.h. parallel. Da schließlich die Parallelen zu einer festen Kurve

²⁹⁾ Vgl. W. BLASCHKE u. G. BOL [4], §§ 1—2.

(einschließlich der $\mathfrak{X}$ - und $\mathfrak{Y}$ -Geraden) die kartesische Ebene lückenlos überdecken, so gilt für die behandelte zweiparametrische Kurvenschar das Parallelenaxiom in seiner verschärften Form. Ersichtlich ist auch das Existenzaxiom I 3 erfüllt.

Da dieses Modell transitive Translationen längs $\mathfrak{Y}$ -Geraden gestattet, so ist in ihm der spezielle kleine Desarguessche Satz δ_3 gültig.

Gilt in dem Modell dann noch $\delta_{\mathfrak{X}}$, so erweist es sich, da alle die Axiome der fünften Stufe erfüllenden archimedisch anordenbaren Modelle Modelle der ersten Stufe sind ([20], S. 108), inzidentiell isomorph der ebenen kartesischen Geometrie und schließlich, wegen der Stetigkeit, als ihr topologisches Abbild.

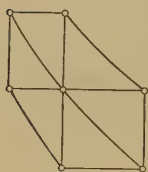


Fig. 8.

Abgesehen von diesem Sonderfall ist jedes Modell der betrachteten Art ein Modell der sechsten Stufe³⁰⁾.

Umgekehrt läßt sich übrigens jede stetige affine Ebene, die transitive Translationen längs einer Richtung gestattet, auf ein derartiges Modell zurückführen.

In den Zahlensystemen dieser stetigen Geometrien der sechsten Stufe ist auf Grund des BLASCHKESCHEN Hauptsatzes über Sechseckgewebe das kommutative Gesetz der Addition II 3 eine Folge der Axiome der sechsten Stufe und der Stetigkeit. In dem Kurven-3-Gewebe, das aus den Punkten der Ebene und den Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ ³¹⁾ besteht, schließen sich als Folge des Satzes δ_3 alle REIDEMEISTER-Figuren ([20], S. 96). Dann schließen sich speziell auch alle „BRIANCHON-Sechsecke“³²⁾, das sind Sechsecke, deren sämtliche Seiten und Diagonalen (letztere durch einen Punkt gehend) Kurven des 3-Gewebes sind (vgl. Fig. 8). Ein Kurvengewebe, in dem sämtliche BRIANCHON-Sechsecke sich schließen, nennt man ein „Sechseckgewebe“. Nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe³³⁾ lassen sich alle aus stetigen Kurven gebildeten Sechseckgewebe auf drei Scharen paralleler Geraden (der euklidischen Geometrie) topologisch abbilden, etwa auf die Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ der gewöhnlichen ebenen kartesischen Geometrie. Da durch diese drei Scharen die Addition beschrieben wird, so ist damit die Isomorphie der additiven Gruppe des Zahlensystems, das die zweiparametrische Kurvenschar analytisch beschreibt, mit der additiven Gruppe der reellen Zahlen gezeigt. Insbesondere gilt daher in jedem Zahlensystem der betrachteten Art das kommutative Gesetz der Addition³⁴⁾.

³⁰⁾ Die von OSWALD WYLER [29] angegebene projektive Modifikation der MOULTONschen Geometrie mit zwei „Achsen“ und die von KENNETH LEVENBERG [14] untersuchten verallgemeinerten MOULTON-Geometrien sind spezielle Fälle der oben konstruierten Klasse von Geometrien der sechsten Stufe.

³¹⁾ $\mathfrak{E}$ ist nach § 2 unter den von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ verschiedenen Scharen von Parallelkurven beliebig wählbar.

³²⁾ W. BLASCHKE u. G. BOL [4], § 2.

³³⁾ W. BLASCHKE u. G. BOL [4], § 2 (insbesondere S. 10).

³⁴⁾ Zahlensysteme der sechsten Stufe, in denen das kommutative Gesetz der Addition nicht gilt, wurden von G. PICKERT [19] konstruiert.

Es wäre zu untersuchen, ob auch die Isomorphie der multiplikativen Gruppe des Zahlensystems mit der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen allein aus dem assoziativen Gesetz der Multiplikation und den Stetigkeitsvoraussetzungen folgt. (Für das Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie ist diese multiplikative Isomorphie nach Ausführung der eindeutigen Abbildung $a \rightarrow a$ bei positivem a und $a \rightarrow \frac{1}{2}a \sqrt{2}$ bei negativem a offenbar.)

Als Beispiel für ein Zahlensystem der besprochenen Art, in dem von den Rechengesetzen (Axiome der Gruppe II) nur das assoziative und kommutative Gesetz der Addition erfüllt sind, geben wir ohne Beweis das folgende an:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \geq 0 \\ a \cdot b & \\ a \cdot \frac{b(b+1)}{2} & \text{für } a \leq 0, \\ \frac{1}{2} a b & \end{cases} \quad \begin{cases} b \geq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \\ b \leq 0. \end{cases} \quad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

3. Zu weiteren Modellen der sechsten Stufe gelangt man durch algebraische Verallgemeinerung der MOULTON-Geometrie. In ihrem Zahlensystem läßt sich der zugrunde gelegte Körper der reellen Zahlen ohne weiteres durch einen beliebigen angeordneten Körper oder Schiefkörper ersetzen, sodann auch die Anordnung durch eine beliebige Bewertung:

Gegeben sei ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}$, das bei den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ den Axiomen der vierten Stufe genügt. In diesem Zahlensystem existiere eine nichttriviale Bewertung w . $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien echte Teilmengen der Menge der durch die Funktion w in $\mathfrak{Z}$ angenommenen (reellen) Funktionswerte; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sollen 0 und ∞ nicht enthalten. Ferner sei φ eine von Null und Eins verschiedene Zahl mit $w(\varphi) = 0$, wobei für alle a, b aus $\mathfrak{Z}$ $(a\varphi)b = a(\varphi b) = a\varphi b$ gelten soll.

Dann läßt sich ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch folgende Vorschrift erklären:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } w(a) \notin \mathfrak{A} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{B} \\ a\varphi b & \text{für } w(a) \in \mathfrak{A} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{B} \end{cases} \quad (a, b \in \mathfrak{Z}).$$

Für das Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ beweisen wir die Axiome der sechsten Stufe. Die Axiome I 1–3, II 1, 3 gelten offensichtlich. Daß die Gleichung $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$ für $a \neq b$ genau eine Lösung hat, erkennt man folgendermaßen:

Zunächst ergibt sich $w(x) = w(c) - w(-a + b)$.

Für $w(a) = w(b)$ folgt dies aus $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$, $-a\varphi x + b\varphi x = (-a + b)\varphi x = c$, wo φ gleich 1 oder φ , also $w(\varphi) = 0$ ist.

Für $w(a) \neq w(b)$ ist $-a\varphi_1 x + b\varphi_2 x = (-a\varphi_1 + b\varphi_2)x = c$ mit $w(\varphi_1) = w(\varphi_2) = 0$, folglich $w(a\varphi_1) \neq w(b\varphi_2)$ und somit nach der verschärften Summenregel

$$w(-a\varphi_1 + b\varphi_2) = \min(w(-a\varphi_1), w(b\varphi_2)) = \min(w(-a), w(b)) = w(-a + b),$$

also

$$w(-a + b) + w(x) = w(c).$$

Damit ist $w(x)$ festgelegt, und die Faktoren ψ bzw. ψ_1 und ψ_2 lassen sich bestimmen. Sodann ist im ursprünglichen Zahlensystem die Gleichung

$$-(a\psi)x + (b\psi)x = c \quad \text{für} \quad a \neq b, w(a) = w(b)$$

bzw.

$$-(a\psi_1)x + (b\psi_2)x = c \quad \text{für} \quad w(a) \neq w(b)$$

eindeutig nach x lösbar. Damit ist $I\alpha$ für das System $\mathfrak{B}^\circ$ bewiesen. $I\beta$ läßt sich entsprechend beweisen.

$\mathfrak{B}^\circ$ ist beiderseits nichtdistributiv; so ist bei $w(a) \in \mathfrak{A}$ und $w(b) \in \mathfrak{B}$ stets

$$a \odot b + 1 \odot b \neq (a + 1) \odot b \quad \text{und} \quad a \odot b + a \odot 1 \neq a \odot (b + 1).$$

Ist speziell $\mathfrak{B}$ der Körper der rationalen Zahlen, w eine p -adische Bewertung und $\varphi > 0$, so gelten in $\mathfrak{B}^\circ$ außer den obigen Axiomen noch III 1–3, IV 1. Das Anordnungsaxiom III 4 gilt hier nicht: Für $0 < \varphi < 1$ wähle man ein beliebiges positives c mit $w(c) \in \mathfrak{A}$ und ein beliebiges positives a mit $w(a) \in \mathfrak{B}$; dann gibt es stets ein b mit $\varphi a < b < a$ und $w(b) = 0$, also

$$a > b, \quad c > 0,$$

$$c \odot a = c \varphi a < c b = c \odot b.$$

Bei $\varphi > 1$ hat man ähnliches. Jedoch gilt die Abschwächung

III 4*: Wenn $a > 0$ und $b > 0$ ist, so ist auch stets $a \odot b > 0$.

Die zugehörigen Geometrien gestatten eine lineare Anordnung der Punkte ihrer Geraden; denn die Anordnung der Punkte auf der x -Achse und der y -Achse und deren Parallelen kann man in Übereinstimmung mit der Anordnung derjenigen Zahlen wählen, die die Abszissen bzw. Ordinaten repräsentieren, und die Anordnung der Punkte auf den übrigen Geraden läßt sich sodann etwa durch Anordnung der Abszissen definieren. Dann aber ist in der Geometrie das PASCH-Axiom verletzt, wie mit den Zahlen a, b, c des obigen Gegenbeispiels gegen das Axiom III 4 das Beispiel des Dreiecks $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, c \odot a)$ und der Geraden $y = (c \odot a) - (c \odot b)$ zeigt.

§ 8. Modelle zur siebenten Stufe.

Unter Verwendung der in § 7.1 benutzten anschaulichen Ausdrucksweise definieren wir folgende Modifikation der MOULTON-Geometrie:

Gegeben sei eine gewöhnliche ebene kartesische Geometrie. Die vier Koordinatenhalbachsen denke man sich alle von 0 ausgehend orientiert, so daß z.B. die Richtung der negativen x -Halbachse der der positiven x -Halbachse entgegengesetzt ist. Nun werden die aus der unteren Halbebene kommenden Geraden, die die positive oder die negative x -Halbachse *stumpf* treffen, im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen und dann schließlich an ihrem Schnittpunkt mit der *positiven* y -Halbachse ebenfalls im Verhältnis 1:2

zur y -Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert. In Fig. 9 sind zur Veranschaulichung des Modells einige Geraden der Schar $\mathfrak{G}$ der neuen Geometrie und die dazu an der y -Achse spiegelbildlichen Geraden eingezeichnet.

Man bestätigt für dieses Modell leicht die ebenen affinen Axiome. Der Satz δ_y^x ist für Dreiecke, deren auf der y -Achse befindlichen Spitzen unterhalb ihrer Grundseite liegen, evident; um ihn auch für Dreiecke einzusehen, deren Spitzen nach oben weisen, strecke man alle Ordinaten der oberen Halbebene um den Faktor 2, was an den Inzidenzverhältnissen nichts ändert. Der Satz δ_3 gilt jedoch nicht. Wie bei der MOULTONschen Geometrie lassen sich Anordnung und Kongruenz definieren, so daß die HILBERTschen Axiome I 1–3, II, III 1–4, IV*, V erfüllt sind. Das Modell gestattet keine Translationen.

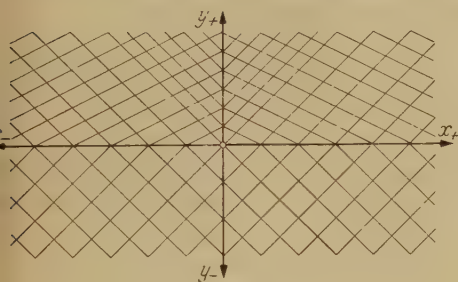


Fig. 9.

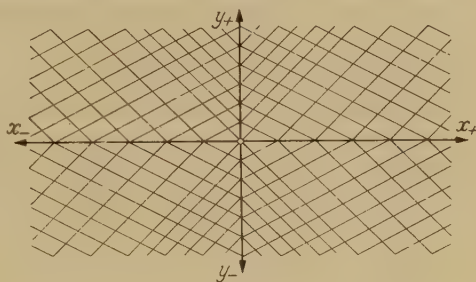


Fig. 10.

In dem entsprechenden Zahlensystem

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b & \text{für } a \leq 0 \text{ oder } b \geq 0 \\ \left. \begin{matrix} a + 2b \\ \frac{a}{2} + b \end{matrix} \right\} & \text{für } a \geq 0, \quad b \leq 0, \quad \begin{cases} |a| \geq |2b| \\ |a| \leq |2b| \end{cases} \end{cases} \quad (a, b \text{ reell})$$

$$a \odot b = a \cdot b$$

gelten die algebraischen Axiome I 1–3, α^* , β^* , II 5, 6, III, IV; das assoziative und das kommutative Gesetz der Addition und die beiden distributiven Gesetze gelten nicht.

Ein anderes Modell ergibt sich, wenn man, von der gewöhnlichen Geometrie ausgehend, festsetzt, daß alle die positive oder negative x -Halbachse stumpf treffenden und alle die positive oder negative y -Halbachse spitz treffenden Geraden im Verhältnis 1:2 zur x - bzw. y -Achse hin gebrochen werden; lediglich die Geraden durch O und die achsenparallelen Geraden bleiben unverändert (Fig. 10).

In dieser Geometrie gelten außer den ebenen affinen Axiomen die Sätze δ_y^x und δ_x^y . In dem entsprechenden Zahlensystem, dessen Multiplikation wie bei dem vorigen Modell isomorph der Multiplikation der reellen Zahlen ist, gelten die Axiome I 1–3, α^* , β^* , II 2, 4–6, III, IV, während II 1 und II 3 nicht gelten. Es sind also das assoziative Gesetz und das kommutative Gesetz der Addition von den restlichen Axiomen der reellen Zahlen unabhängig.

Es sei noch kurz auf eine Verallgemeinerung dieser Beispiele hingewiesen. Gegeben sei ein ebenes Kurven-4-Gewebe. Drei der Scharen seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ genannt, und jede von ihnen überdecke die gesamte Ebene einfach und lückenlos. Alle Kurven der vierten Schar mögen durch einen Punkt O gehen und die übrige Ebene einfach und lückenlos überdecken. Die $\mathfrak{X}$ -, $\mathfrak{Y}$ - und $\mathfrak{E}$ -Kurve durch O mögen auch der vierten Schar angehören und seien der Reihe nach x , y und e genannt:

Sei nun g eine von x , y und e verschiedene Kurve der vierten Schar und P ein beliebiger Punkt auf ihr. A sei ein von O verschiedener Punkt von y . Die $\mathfrak{X}$ -Gerade durch P habe mit e einen Schnittpunkt, und die durch diesen Punkt gezogene $\mathfrak{Y}$ -Gerade treffe die $\mathfrak{E}$ -Gerade durch A in einem weiteren Punkt. Sodann mögen sich die $\mathfrak{X}$ -Gerade durch den erhaltenen Punkt und die $\mathfrak{Y}$ -Gerade durch P in einem Punkt P' schneiden. Durchläuft P die Kurve g , so durchläuft P' eine Kurve g' , die wir die „Parallelkurve“ zu g durch A nennen wollen. Fügt man nun zu dem Kurven-4-Gewebe die so definierten Parallelkurven der Kurven der vierten Schar hinzu, so erhält man eine zweiparametrische Kurvenschar, in der unter gewissen Voraussetzungen für das gegebene Kurven-4-Gewebe die ebenen affinen Axiome erfüllt sind. Dann gilt in dieser Kurvenschar auf Grund der Konstruktion der Parallelkurven (die in der Tat die Rolle der Parallelen übernehmen) stets der Satz δ_y^x . — Beispiele solcher Geometrien sind die beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Modelle, sodann auch die MOULTONSche und die ebene euklidische Geometrie.

Eine derartige affine Geometrie ist dann und nur dann ein Modell der siebenten Stufe, wenn die drei Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ kein Sechseckgewebe bilden. Denn wenn sich in dem $\mathfrak{X} \mathfrak{Y} \mathfrak{E}$ -Gewebe nicht alle Sechsecke schließen, dann können sich erst recht nicht alle REIDEMEISTER-Figuren schließen; folglich genügt dann diese Geometrie nicht den Axiomen der sechsten Stufe, sondern nur denen der siebenten Stufe. Ist andererseits das Gewebe ein Sechseckgewebe, dann läßt sich nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe dieses auf drei Scharen paralleler Geraden topologisch abbilden, es schließen sich also in ihm alle REIDEMEISTER-Figuren und alle THOMSENSchen Dreiecke, und es folgt aus $R_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{E}}$ und δ_y^x der Satz $\delta_{\mathfrak{Y}}^x$; es ergeben sich in diesem Falle im wesentlichen (d.h. bis auf topologische Abbildungen) die Geometrien von § 7.2.

Literatur.

- [1] ALBERT, A. A.: On right alternative algebras. Ann. of Math. (2) **50**, 318—328 (1949). — [2] ALBERT, A. A.: On nonassociative division algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 296—309 (1952). — [3] ARTIN, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Colloq., Ser. II **2**, 15—20 (Notre Dame 1940). — [4] BLASCHKE, W., u. G. BOL: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [5] BRUCK, R. H.: Loops with transitive automorphism groups. Pacific J. Math. **1**, 481—483 (1951). — [6] BRUCK, R. H., and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [7] BRUCK, R. H., and H. J. RYSER: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1**, 88—93 (1949). — [8] DICKSON, L. E.: Linear algebras. Cambridge 1914. — [9] DICKSON, L. E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927. — [10] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — Correction to

„Projective planes“. Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [11] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930. — [12] KLEINFELD E.: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 818—820 (1951). — [13] KLINGENBERG, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. Math. Sem. Hbg. **18**, 120—143 (1952). — [14] LEVENBERG, K.: A class of non-Desarguesian plane geometries. Amer. Math. Monthly **57**, 381—387 (1950). — [15] MOUFANG, R.: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. Math. Ann. **106**, 755—795 (1932). — [16] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. Math. Sem. Hbg. **9**, 207—222 (1932). — [17] MOULTON, F. R.: A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902). — [18] NEUMANN, B. H.: On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. **15**, 203—208 (1940). — [19] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. d. Math. **3**, 335—342 (1952). — [20] REIDEMEISTER, K.: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. — [21] SKORNIKOW, L. A.: Alternativkörper. Ukrain. Mat. J. **2**, No. 1, 70—85 (1950) (Russisch). — [22] SKORNIKOW, L. A.: Rechtsalternativ-Körper. Izwestija Akad. Nauk SSSR., Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951) (Russisch). — [23] SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [24] STETTLER, R.: Über endliche Geometrien. Ann. Acad. Sci. fenn., Ser. A, I. Math.-Phys. **72** (1950). — [25] TARRY, G.: Le problème des 36 officiers. C. R. Assoc. franc. Avancement Sci. **1900**, partie 1, 122—123 (1900), partie 2, 170—203 (1901). — [26] THOMSEN, G.: Schnittpunktssätze in ebenen Geweben. Abh. Math. Sem. Hbg. **7**, 99—106 (1929). — [27] VEULEN, O., and J. H. M. WEDDERBURN: Non-desarguesian and non-pascalian geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 379—388 (1907). — [28] WITT, E.: Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **8**, 413 (1931). — [29] WYLER, O.: Order and topology in projective planes. Amer. J. Math. **74**, 656—666 (1952). — [30] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **11**, 187—220 (1936).

Marburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 16. Dezember 1953.)

Lebenslauf.

Am 8. Oktober 1927 wurde ich in Schwelm in Westfalen als Sohn des Justizangestellten Wilhelm Naumann und seiner Ehefrau Klara geb. Schmidt geboren. Ich bin evangelisch und deutscher Staatsangehöriger.

Von Ostern 1934 bis Ostern 1938 besuchte ich die Volksschule in Schwelm und anschließend die Städtische Oberschule für Jungen in Schwelm. Durch Einberufung zum Luftwaffenhelfer-, Arbeits- und Wehrdienst erfuhr mein Schulbesuch eine zweijährige Unterbrechung und wurde am 18. Juni 1947 mit der Reifeprüfung abgeschlossen.

Von Wintersemester 1947/48 bis Sommersemester 1950 studierte ich in Göttingen und von Wintersemester 1950/51 bis Wintersemester 1951/52 in Marburg a. d. Lahn Mathematik, Physik und Philosophie. Nach meiner mündlichen Doktorprüfung am 28. Januar 1953 habe ich am 18. Juli 1953 die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen abgelegt. Meine akademischen Lehrer waren in Göttingen Frau Prof. H. Braun und die Herren Professoren und Dozenten R. Becker, H. Boerner, E. Graeser, N. Hartmann †, K. H. Hellwege, Th. Kaluza sen. †, H. Kopfermann, M. v. Laue, G. Ludwig, G. Lyra, W. Magnus, W. Paul, H. Pick, R. W. Pohl, Arnold Schmidt, Th. Schneider, F. Seyfarth, K. Stavenhagen †, W. Tollmien und C. F. v. Weizsäcker und in Marburg die Herren Professoren J. Ebbinghaus, M. Krafft, K. Reich, K. Reidemeister, Arnold Schmidt und W. Walcher.

Allen meinen Lehrern auf der Universität und auf der Schule wie auch meinen Eltern bin ich zu großem Dank verpflichtet. Ganz besonders danke ich an dieser Stelle Herrn Studienrat Waldemar Nocken in Schwelm, der mich schon frühzeitig an die mathematische Denkweise herangeführt hat, und Herrn Professor Dr. Arnold Schmidt, dem ich meine geometrische Ausbildung zum weitaus größten Teil verdanke.

